ВАРИАНТ 1

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0\left(-1;\sqrt{3}\right)$ и $N_0\left(2\sqrt{3};2\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

   Ответ: $\left(2;2\sqrt{3}\right)$, $(-4;0)$, $\left(2;-2\sqrt{3}\right)$.

   Решение. Обозначим точки, в которых находятся муравей и жук $M\left(\alpha\right)$ и $N\left(\beta\right)$ соответственно, где α и β – углы, которые образуют радиус-векторы точек M и N с положительным направлением оси абсцисс. Заметим, что угол между $\overrightarrow{AM_0}$ и $\overrightarrow{AN_0}$ равен $\frac{\pi}{2}$, и при этом $\alpha_0=\frac{2\pi}{3}$, $\beta_0=\frac{\pi}{6}$ – углы, соответствующие начальным расположениям насекомых.

   Расстояние между муравьём и жуком будет наименьшим тогда, когда угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ равен нулю. Поскольку $|AM_0|=2$ и $|AN_0|=4$ – это радиусы окружностей, и $|AN_0|=2\,|AM_0|$, то угловая скорость муравья в 2 раза больше угловой скорости жука.

   Пусть к моменту совпадения направления векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ жук продвинулся на угол ω. Тогда $\alpha_0-2\omega=\beta_0+\omega+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$ Следовательно, $\omega=\frac{\alpha_0-\beta_0}{3}-\frac{2\pi n}{3}=\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi n}{3}$, где $n=0,-1,-2\ldots$

   Различных точек будет три (при $n=0,-1,-2$). Для $n=0$ получаем $\beta_1=\beta_0+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$. Координаты положения жука найдём по формулам $x_N=4\cos\beta_1=2$, $y_N=4\sin\beta_1=2\sqrt{3}$.

   Остальные точки получаются поворотом точки N_1 вокруг начала координат на углы $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ и имеют, соответственно, координаты $(-4;0)$ и $\left(2;-2\sqrt{3}\right)$.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b, при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases}3(a+b)x+12y=a,\\ 4bx+(a+b)by=1\end{cases}$$

   имеет бесконечно много решений.

   Ответ: $(1;3)$, $(3;1)$, $\left(-2-\sqrt{7};\sqrt{7}-2\right)$, $\left(\sqrt{7}-2;-2-\sqrt{7}\right)$.

   Решение. Если $b=0$, то второе уравнение системы принимает вид $1=0$, и поэтому решений у системы нет. При всех остальных значениях параметров в каждом из уравнений хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля. Следовательно, оба уравнения системы определяют некоторые прямые, и для существования бесконечного количества решений нужно, чтобы эти прямые совпадали. Это возможно при пропорциональности коэффициентов уравнений, т.е. при

$$\frac{3(a+b)}{4b}=\frac{12}{(a+b)b}=\frac{a}{1}. \qquad (1)$$

   Отметим также, что невозможен случай, когда коэффициенты при одной из переменных или свободные члены обращаются в ноль в обоих уравнениях[1]. Рассматривая первое равенство из (**??**), получаем $(a+b)^2=16$, $a=\pm4-b$. Далее подставим это во второе равенство (**??**):

   – если $a=-4-b$, то $-\frac{3}{b}=-4-b$, $b^2+4b-3=0$, $b=-2\pm\sqrt{7}$; отсюда получаем два решения системы: $\left(-2-\sqrt{7};\sqrt{7}-2\right)$ и $\left(\sqrt{7}-2;-2-\sqrt{7}\right)$;

   – если $a=4-b$, то $\frac{3}{b}=4-b$, $b^2-4b+3=0$, $b=1$ или $b=3$; отсюда получаем ещё два решения системы: $(1;3)$, $(3;1)$.

[1] Вообще говоря, это существенное замечание. Например, уравнения $y+8=0$ и $2y+16=0$ задают одну и ту же прямую.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$.

   Ответ: 2; $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$.

   Решение. Раскладывая правую часть на множители, получаем $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=(x+3)(x+2)$. Отсюда есть две возможности: либо $x+3=0$ (тогда $x=-3$, что не подходит по ОДЗ, так как подкоренное выражение отрицательно), либо $\sqrt{x^3-x+10}=x+2$. Решаем последнее уравнение:

$$\begin{cases} x^3-3x+10=(x+2)^2, \\ x+2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-x^2-5x+6=0, \\ x \geqslant -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)\left(x^2+x-3\right)=0, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$$

   Уравнение системы имеет корни $x=2$, $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$, и из них неравенству удовлетворяют $x=2$ и $x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$. Это и есть ответ к задаче.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1 \geqslant 0$.

   Ответ: $\left(-\infty;-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[-1;\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2};+\infty\right)$.

   Решение. Неравенство можно переписать в виде $2x^4+(x-1)^2-3x^2|x-1| \geqslant 0$ или $|x-1|^2-3x^2|x-1|+2x^4 \geqslant 0$. Чтобы разложить левую часть на множители, отметим, что она представляет собой квадратный трёхчлен относительно $y=|x-2|$ с дискриминантом, равным $\left(3x^2\right)^2-4\cdot 2x^4=x^4$. Значит, корни $y_{1,2}$ равны $\frac{3x^2\pm x^2}{2}$, т.е. $y_1=x^2$ и $y_2=2x^2$, а неравенство принимает вид $\left(|x-1|-x^2\right)\left(|x-1|-2x^2\right) \geqslant 0$.

   В последнем неравенстве требуется сравнить произведение двух чисел с нулём, поэтому при замене каждого из множителя выражением того же знака мы получим равносильное неравенство. Достаточно отметить, что для неотрицательных чисел A и B знак разности $A-B$ совпадает со знаком разности квадратов $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$. Отсюда получаем

$$\left((x-1)^2-x^4\right)\left((x-1)^2-4x^4\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2+x-1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(2x^2+x-1\right)\left(2x^2-x+1\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2+x-1\right)\left(2x^2+x-1\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[-1;\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2};+\infty\right).$$

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1 400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

   Ответ: 5 880.

   Решение. Ввиду того, что $1\,400=7\cdot 2^3\cdot 5^2$, искомые числа могут состоять из следующих цифр: (а) три двойки, две пятёрки, одна семёрка и две единицы, (б) четвёрка, двойка, две пятёрки, одна семёрка и три единицы или (в) восьмёрка, две пятёрки, одна семёрка и четыре единицы. Вычислим количество вариантов в каждом случае.

   (а) Сначала выбираем три места из восьми для расположения двоек ($C_8^3=\frac{8!}{3!5!}$ способов), затем два места из пяти оставшихся для размещения пятёрок ($C_5^2=\frac{5!}{3!2!}$ способов), затем одно место из трёх оставшихся для семёрки ($C_3^1=1$ способа). Наконец, оставшиеся места занимают единицы. По правилу произведения выходит $C_8^3\cdot C_5^2\cdot 3=\frac{8!}{3!2!2!}=1\,680$ способов.

   (б) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{2!3!}=3\,360$.

   (в) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{2!4!}=840$.

   Окончательно получаем $1\,680+3\,360+840=5\,880$ способов.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

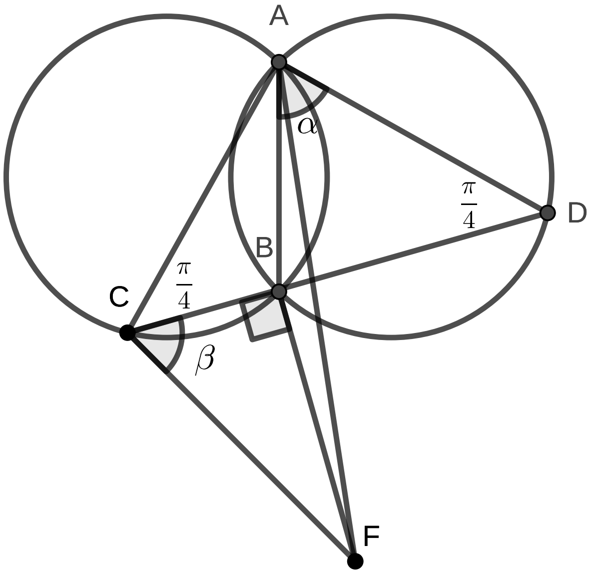

Рис. 1: вариант 1, задача 6

Ответ: 18.

Решение. Пусть $R = 9$ – радиусы данных в условии окружностей, $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCF = \beta$. Тогда $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и по теореме синусов $BD = 2R\sin\alpha$, $BC = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2R\cos\alpha$. Значит, $CF^2 = BC^2 + BD^2 = 4R^2\cos^2\alpha + 4R^2\sin^2\alpha = 4R^2$, откуда $CF = 2R = 18$.

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leqslant 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

Ответ: $(0;0)$, $(6;0)$.

Решение. Рассмотрим неравенство системы и изобразим множество его решений на координатной плоскости. Для раскрытия модулей найдём множества точек, в которых выражения под модулями обращаются в ноль. Это прямые $x-3-y=0$ и $x-3+y=0$. Они делят плоскость на 4 части, и в каждой из этих частей знаки выражений под модулями постоянны. Чтобы их определить, можно выбрать в каждой из четырёх частей по точке и найти знаки посчитать знаки выражений в этих точках. Возьмём область, расположенную снизу от обеих прямых. В ней лежит, например, точка $(0;-10)$. Подстановкой несложно убедиться, что в этой точке выражение $x-3-y$ положительно, а $x-3+y$ отрицательно. Таким образом, неравенство принимает вид $(x-3-y)-(x-3+y) \leqslant 6$, откуда $y \geqslant -3$. С учётом рассматриваемых ограничений подходит область, лежащая выше прямой $y=-3$ и ниже прямых $x-3-y=0$, $x-3+y=0$. Аналогично рассматриваем остальные три случая, и в итоге получаем квадрат K с вершинами в точках $A(6;-3)$, $B(6;3)$, $C(0;3)$ и $D(0;-3)$ (см. рисунок).

Рассмотрим уравнение системы. При $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ оно принимает вид $(x-3)^2+(y-4)^2 = 25$, и мы получаем окружность радиуса 5 с центром в точке $(3;4)$ (точнее её часть, лежащую в первой четверти). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены x на $(-x)$ и/или y на $(-y)$, множество точек, заданное уравнением системы, симметрично относительно обеих

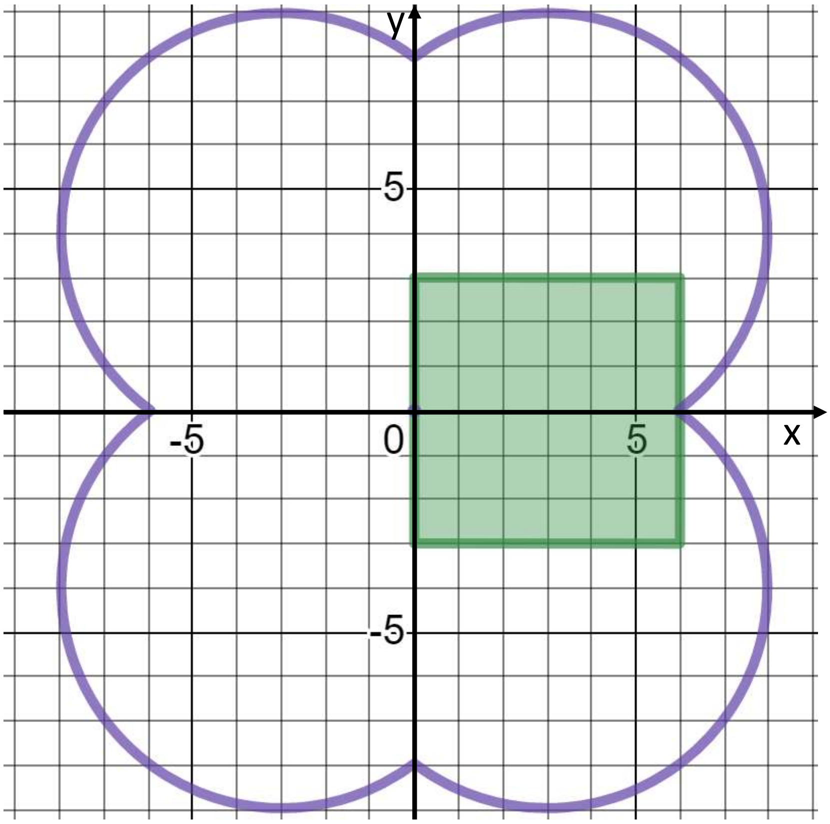

Рис. 2: вариант 1, задача 7

осей координат. Отражая полученную дугу относительно обеих осей координат и точки $(0;0)$, получаем искомое множество. Обратите внимание, что оно состоит из четырёх дуг окружностей и начала координат.

Теперь становится видно, что множества имеют ровно две общие точки – т.е. система имеет два решения $(0;0)$ и $(6;0)$.

ВАРИАНТ 2

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Синица двигается по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0\left(\sqrt{3};3\right)$ и $N_0\left(6;-2\sqrt{3}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

   Ответ: $\left(4\sqrt{3};0\right)$, $\left(-2\sqrt{3};6\right)$, $\left(-2\sqrt{3};-6\right)$.

   Решение. Обозначим точки, в которых находятся синица и снегирь $M(\alpha)$ и $N(\beta)$ соответственно, где α и β – углы, которые образуют радиус-векторы точек M и N с положительным направлением оси абсцисс. Заметим, что угол между $\overrightarrow{AM_0}$ и $\overrightarrow{AN_0}$ равен $\frac{\pi}{2}$, и при этом $\alpha_0=\frac{\pi}{3}$, $\beta_0=-\frac{\pi}{6}$ – углы, соответствующие начальным расположениям птиц.

   Расстояние между синицей и снегирём будет наименьшим тогда, когда угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ равен нулю. Поскольку $|AM_0|=2\sqrt{3}$ и $|AN_0|=4\sqrt{3}$ – это радиусы окружностей, и $|AN_0|=2\,|AM_0|$, то угловая скорость синицы в 2 раза больше угловой скорости снегиря.

   Пусть к моменту совпадения направления векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ снегирь продвинулся на угол ω. Тогда $\alpha_0-2\omega=\beta_0+\omega+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$ Следовательно, $\omega=\frac{\alpha_0-\beta_0}{3}-\frac{2\pi n}{3}=\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi n}{3}$, где $n=0,-1,-2\ldots$

   Различных точек будет три (при $n=0,-1,-2$). Для $n=0$ получаем $\beta_1=\beta_0+\frac{\pi}{6}=0$. Координаты положения снегиря найдём по формулам $x_N=4\sqrt{3}\cos\beta_1=4\sqrt{3}$, $y_N=4\sqrt{3}\sin\beta_1=0$.

   Остальные точки получаются поворотом точки N_1 вокруг начала координат на углы $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ и имеют, соответственно, координаты $\left(-2\sqrt{3};6\right)$ и $\left(-2\sqrt{3};-6\right)$.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b, при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases}2(a-b)x+6y=a,\\3bx+(a-b)by=1\end{cases}$$

   имеет бесконечно много решений.

   Ответ: $(-1;2)$, $(-2;1)$, $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};\frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)$.

   Решение. Если $b=0$, то второе уравнение системы принимает вид $1=0$, и поэтому решений у системы нет. При всех остальных значениях параметров в каждом из уравнений хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля. Следовательно, оба уравнения системы определяют некоторые прямые, и для существования бесконечного количества решений нужно, чтобы эти прямые совпадали. Это возможно при пропорциональности коэффициентов уравнений, т.е. при

$$\frac{2(a-b)}{3b}=\frac{6}{(a-b)b}=\frac{a}{1}. \tag{2}$$

   Отметим также, что невозможен случай, когда коэффициенты при одной из переменных или свободные члены обращаются в ноль в обоих уравнениях[2]. Рассматривая первое равенство из (**??**), получаем $(a-b)^2=9$, $a=b\pm3$. Далее подставим это во второе равенство (**??**):

   – если $a=b+3$, то $\frac{2}{b}=b+3$, $b^2+3b-2=0$, $b=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$; отсюда получаем два решения системы: $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};\frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)$;

[2]Вообще говоря, это существенное замечание. Например, уравнения $y+8=0$ и $2y+16=0$ задают одну и ту же прямую.

– если $a = b - 3$, то $-\frac{2}{b} = b - 3$, $b^2 - 3b + 2 = 0$, $b = 1$ или $b = 2$; отсюда получаем ещё два решения системы: $(-2; 1)$, $(-1; 2)$.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3 - 16x + 25} = x^2 + 3x - 10$.

Ответ: 3; $\frac{\sqrt{13}+1}{2}$.

Решение. Раскладывая правую часть на множители, получаем $(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(2x-4)$. Отсюда есть две возможности: либо $x + 5 = 0$ (тогда $x = -5$, что не подходит по ОДЗ, так как подкоренное выражение отрицательно), либо $\sqrt{x^3 - 16x + 25} = 2x - 4$. Решаем последнее уравнение:

$$\begin{cases} x^3 - 16x + 25 = (2x-4)^2, \\ 2x - 4 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 9 = 0, \\ x \geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)\left(x^2 - x - 3\right) = 0, \\ x \geqslant 2. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет корни $x = 3$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$, и из них неравенству удовлетворяют $x = 3$ и $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Это и есть ответ к задаче.

4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geqslant 0$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right] \cup [1; +\infty)$.

Решение. Неравенство можно переписать в виде $6x^4 + (x+1)^2 - 5x^2|x+1| \geqslant 0$ или $|x+1|^2 - 5x^2|x-1| + 6x^4 \geqslant 0$. Чтобы разложить левую часть на множители, отметим, что она представляет собой квадратный трёхчлен относительно $y = |x+1|$ с дискриминантом, равным $\left(5x^2\right)^2 - 4 \cdot 6x^4 = x^4$. Значит, корни $y_{1,2}$ равны $\frac{5x^2 \pm x^2}{2}$, т.е. $y_1 = 3x^2$ и $y_2 = 2x^2$, а неравенство принимает вид $\left(|x+1| - 3x^2\right)\left(|x+1| - 2x^2\right) \geqslant 0$.

В последнем неравенстве требуется сравнить произведение двух чисел с нулём, поэтому при замене каждого из множителя выражением того же знака мы получим равносильное неравенство. Достаточно отметить, что для неотрицательных чисел A и B знак разности $A - B$ совпадает со знаком разности квадратов $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$. Отсюда получаем

$$\left((x+1)^2 - 9x^4\right)\left((x+1)^2 - 4x^4\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(3x^2 + x + 1\right)\left(3x^2 - x - 1\right)\left(2x^2 + x + 1\right)\left(2x^2 - x - 1\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(3x^2 - x - 1\right)\left(2x^2 - x - 1\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right] \cup [1; +\infty).$$

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7 000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

Ответ: 5 600.

Решение. Ввиду того, что $7\,000 = 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3$, искомые числа могут состоять из следующих цифр: (а) три двойки, три пятёрки, одна семёрка и одна единица, (б) четвёрка, двойка, три пятёрки, одна семёрка и две единицы или (в) восьмёрка, три пятёрки, одна семёрка и три единицы. Вычислим количество вариантов в каждом случае.

(а) Сначала выбираем три места из восьми для расположения двоек ($C_8^3 = \frac{8!}{3!5!}$ способов), затем три места из пяти оставшихся для размещения пятёрок ($C_5^3 = \frac{5!}{3!2!}$ способов), затем одно место из двух оставшихся для семёрки ($C_2^1 = 2$ способа). Наконец, оставшиеся места занимают единицы. По правилу произведения выходит $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2 = \frac{8!}{3!3!} = 1\,120$ способов.

(б) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{2!3!} = 3\,360$.

(в) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{3!3!} = 1\,120$. Окончательно получаем $1\,120 + 3\,360 + 1\,120 = 5\,600$ способов.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

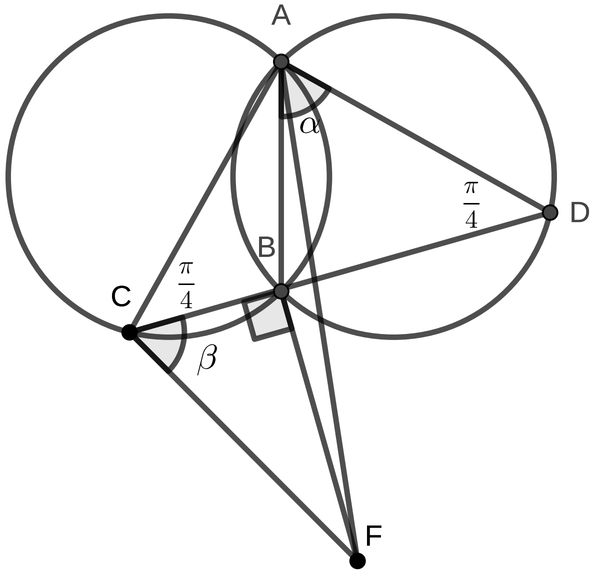

Рис. 3: вариант 2, задача 6

Ответ: 14.

Решение. Пусть $R = 7$ – радиусы данных в условии окружностей, $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCF = \beta$. Тогда $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и по теореме синусов $BD = 2R\sin\alpha$, $BC = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2R\cos\alpha$. Значит, $CF^2 = BC^2 + BD^2 = 4R^2\cos^2\alpha + 4R^2\sin^2\alpha = 4R^2$, откуда $CF = 2R = 14$.

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leqslant 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

Ответ: $(0;0)$, $(-10;0)$.

Решение. Рассмотрим неравенство системы и изобразим множество его решений на координатной плоскости. Для раскрытия модулей найдём множества точек, в которых выражения под модулями обращаются в ноль. Это прямые $x+y+5=0$ и $x-y+5=0$. Они делят плоскость на 4 части, и в каждой из этих частей знаки выражений под модулями постоянны. Чтобы их определить, можно выбрать в каждой из четырёх частей по точке и найти знаки посчитать знаки выражений в этих точках. Возьмём область, расположенную снизу от обеих прямых. В ней лежит, например, точка $(0;-10)$. Подстановкой несложно убедиться, что в этой точке выражение $x-y+5$ положительно, а $x+y+5$ отрицательно. Таким образом, неравенство принимает вид $-(x+y+5)+(x-y+5) \leqslant 10$, откуда $y \geqslant -5$. С учётом рассматриваемых ограничений подходит область, лежащая выше прямой $y=-5$ и ниже прямых $x+y+5=0$, $x-y+5=0$. Аналогично рассматриваем остальные три случая, и в итоге получаем квадрат K с вершинами в точках $A(0;-5)$, $B(0;5)$, $C(-10;5)$ и $D(-10;-5)$ (см. рисунок).

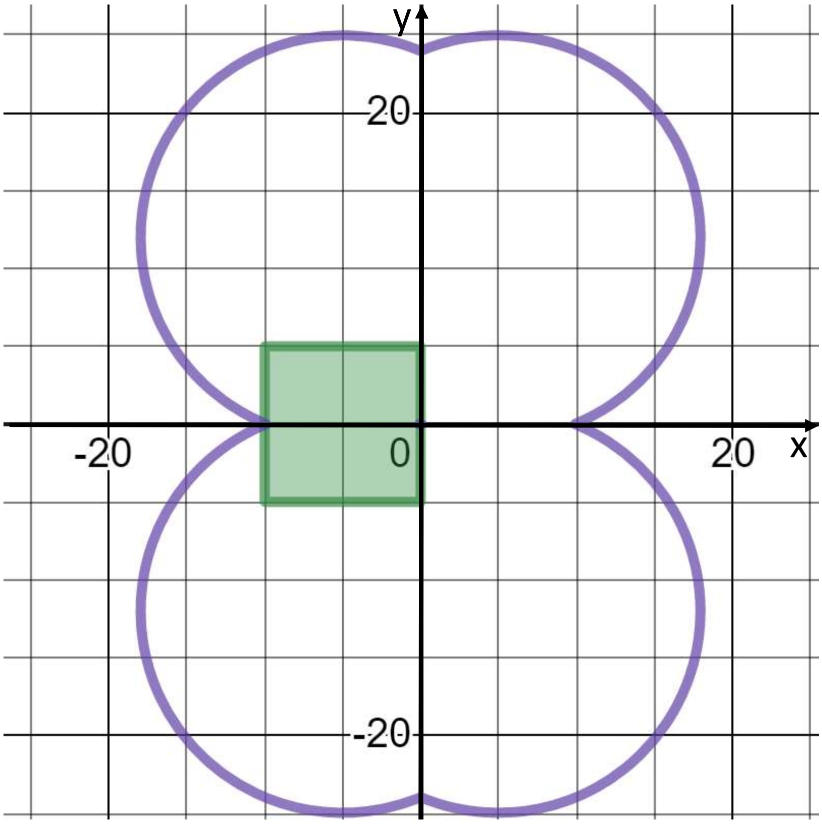

Рис. 4: вариант 2, задача 7

Рассмотрим уравнение системы. При $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ оно принимает вид $(x-5)^2+(y-12)^2=169$, и мы получаем окружность радиуса 13 с центром в точке $(5;12)$ (точнее её часть, лежащую в первой четверти). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены x на $(-x)$ и/или y на $(-y)$, множество точек, заданное уравнением системы, симметрично относительно обеих осей координат. Отражая полученную дугу относительно обеих осей координат и точки $(0;0)$, получаем искомое множество. Обратите внимание, что оно состоит из четырёх дуг окружностей и начала координат.

Теперь становится видно, что множества имеют ровно две общие точки – т.е. система имеет два решения $(0;0)$ и $(-10;0)$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

За арифметическую ошибку, существенно не влияющую на ход решения, снимается 1 балл.

1. **(4 балла)** Найдены радиусы обеих окружностей .... баллы не добавляются;

   Найдены радиусы обеих окружностей и соотношение между угловыми скоростями ... 2 балла;

   составлено уравнение, из которого могут быть выражены искомые координаты .... 1 балл.

2. **(4 балла)** Записано условие, при котором система уравнений имеет бесконечно много решений (пропорциональность коэффициентов уравнения или эквивалентное условие) .... 1 балл;

   записано условие пропорциональности, но не учтено, что оба коэффициента при одной переменной могут равняться нулю .... снять 1 балл;

   предполагается, что уравнения системы должны быть одинаковы .... 0 баллов за задачу;

   неэквивалентное преобразование системы (исходной или новой системы уравнений относительно параметров) .... не более 1 балла за задачу;

   потеряно хотя бы одно решение .... не более 2 баллов за задачу.

3. **(4 балла)** Уравнение сведено к кубическому .... 1 балл;

   сокращение обеих частей уравнения на линейную функцию произведено без проверки .. снять 1 балл;

   получен один лишний корень .... не более 2 баллов за задачу;

   получено более одного лишнего кореня .... не более 1 балла за задачу.

4. **(6 баллов)** При решении рассмотрением двух случаев: .... по 3 балла за каждый случай;

   при другом способе решения: левая часть неравенства разложена на множители ..... 3 балла.

5. **(4 балла)** За рассмотрение каждого из случаев .... по 1 баллу (при этом балл ставится, даже если результат в случае не сведён к числу);

6. **(5 баллов)** Доказано, что треугольник ACD равнобедренный прямоугольный (или найден один из его острых углов) .... 1 балл;

   при решении считается, что точка B – середина CD .... не более 1 балла за задачу.

7. **(6 баллов)** Изображено множество точек, удовлетворяющих неравенству системы .. 3 балла;

   если при этом стороны квадрата не параллельны осям координат не более 2 баллов за задачу;

   изображено множество точек, удовлетворяющих уравнению системы .... 2 балла;

   если при этом потеряно начало координат, то .... 1 балл вместо 2 баллов;

   неверный ответ вследствие неарифметической ошибки .... не более 4 баллов за задачу.